Студентско състезание по стохастика
“Димитър Въндев”

катедра ВОИС
ФМИ, СУ “Св.Климент Охридски”

София
2014

Общи положения

Състезанието е в памет на нашия колега Димитър Въндев и е посветено на десетата годишнина от възстановяването на специализацията “Вероятности и статистика” като Магистърска програма.

В състезанието могат да участват студенти от ФМИ на СУ “Св. Климент Охридски” и от други висши училища индивидуално или отборно (до трима души в екип). Жури присъжда една първа и две поощрителни награди. Оценяват се верността на решенията, пълнотата и оригинални идеи. Решенията се изпращат на адрес <statlab@fmi.uni-sofia.bg> в един pdf файл с кратко и ясно описание на решенията, придружени от представяне на участника.

При установяване на плагиатство, състезателите се декласират.

Срокове

Решенията се изпращат на адрес <statlab@fmi.uni-sofia.bg> до 23 април 2014 г. включително (до 23 часа и 59 минути).

Журито обявява резултата до 24 май 2014 година.

Задачи

***Задача* 1.** Сървър обслужва всеки от своите 3600 клиента средно по един път на всеки час, като капацитетът му позволява обслужване на четири заявки за секунда. Каква е вероятността в дадена секунда да настъпи колизия - да постъпят пет или повече заявки едновременно? Какво е средното време между две колизии?

***Задача* 2.** Заек тръгва от началото $x = 0$ и скача – скок напред с вероятност a, скок назад с вероятност b и стои на място в останалите случаи. В началото скача напред с вероятност a и остава на място в противен случай. Да се определи разпределението на вероятностите на разстоянието X (в скокове) от началото, стабилизирало се след много дълго скачане. Да се намерят математическото очакване и дисперсията на X.

***Задача* 3.** Първият от двама играчи избира скришом монета от 10 или 20 стотинки, а вторият отгатва стойността на скритата монета. Ако не познае плаща 15 стотинки, в противен случай получава монетата. Честна ли е играта? Каква е оптималната смесена стратегия на двамата играчи?

***Задача* 4.** Единичен куб се проектира върху равнина. Посоката на проектиране е случайна с изотропно разпределение (равномерно по всички посоки). Да се намери математическото очакване на площта на проекцията.

***Задача* 5.** Някой избира две различни неотрицателни цели числа X и Y и скрито ги записва на две отделни картончета. Разпределението на (X, Y) не е известно (но X и Y са различни с вероятност 1). Вие избирате случайно едното картонче и виждате записаното на него число. Нека означим това случайно число с U, а другата неизвестно ни число със V. Задачата е да се отгатне дали U е по-голямо от V или не. Имате на разположение генератор за случайни числа, т.е. ако желаете може да генерирате независими равномерно разпределени числа (в интервала $[0, 1]$), така че да ползвате рандомизирана стратегия. Намерете стратегия, която не зависи от разпределението на (X, Y) и осигурява верен отговор с вероятност $1/2 + \epsilon$, като $\epsilon > 0$ може да зависи от разпределението на (X, Y).

***Задача* 6.** В зала със сто и двадесет места е обявен концерт и са продадени сто и двадесет билета. Първият влязъл е разсеян и сяда на случайно избрано място. Всеки следващ зрител заема мястото си отбелязано на билета, ако не е заето, а ако е заето избира случайно едно от свободните места. Каква е вероятността последният зрител да седне на мястото си?

***Задача* 7.** Разполагаме единствено с неправилна монета с вероятност за “ези” $p \in [0, 1]$. Трябва да се съставят правила на игра между двама играчи A и B по такъв начин, че играч A печели с вероятност точно равна на α, където α е произволно предварително избрано число от интервала $[0, 1]$. Играта трябва да завършва за краен брой хвърляния на монетата с вероятност 1.

***Задача* 8.** Избират се две случайни числа от интервала $[0, 1]$, които определят крайните точки на случаен интервал. Процедурата се повтаря N пъти. Каква е вероятността между интервалите да има такъв, който има непразно сечение с всички останали.

***Задача* 9.** Шахматна дъска с размери $m \times n$ е оцветена случайно, като за всеки квадрат е избрана случайно бяла или черна боя (с равни вероятности). Казваме, че два квадрата P и Q, са от една и съща едноцветна фигура, ако съществува редица от квадрати с начало P и край Q, в която всички са с един и същи цвят и всеки квадрат има обща страна със следващия го в редицата. Да се покаже, че математическото очакване на броя на едноцеветните фигури е по-голямо от $m.n/8$ и по-малко от $(m + 2).(n + 2)/6$.

***Задача* 10.** (*Разпределение на Обрешков*) Нека X и Y са такива целочислени случайни величини, че X има Поасоново разпределение при условие $Y = k$ за всяка фиксирана стойност на k и обратно, Y има Поасоново разпределение при условие $X = j$ за всяка фиксирана стойност на j. Да се покаже, че

$$P(X = j, Y = k) = C.\frac{\lambda^j.\mu^k.\nu^{j.k}}{j!.k!}, \quad (j, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

където λ, μ и ν са положителни констнати, а C е нормиращ множител, т.е.

$$C^{-1} = \sum_{j,k} \frac{\lambda^j.\mu^k.\nu^{j.k}}{j!.k!}.$$

Да се покаже също, че необходимо и достатъчно условие X и Y да са независими е $\nu = 1$. Да се изследва зависимостта на математическото очакване, дисперсията и ковариацията на двете случайни величини от параметрите λ, μ и ν.

***Задача* 11.** Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ е редица наблюдения на количествена променлива. Означаваме средната аритметична и сумата от квадратичните отклонения на първите n наблюдения съответно с

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{и} \quad SS_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Проверете рекурентните формули

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + \frac{1}{n+1}(x_{n+1} - \bar{x}_n) \quad \text{и} \quad SS_{n+1} = SS_n + \frac{n}{n+1}(x_{n+1} - \bar{x}_n)^2$$

и напишете код (на език по избор или псевдокод) за адаптивно изчисляване на двете статистики (след всяко постъпване на ново наблюдение).

Обобщете задачата за многомерни наблюдения $x_i = (x_i(1), \ldots, x_i(m)) \in R^m$, съответно средната аритметична също е от R^m, а SS_n е симетрична $(m \times m)$ матрица с елементи

$$SS_n(j,k) = \sum_{i=1}^{n}(x_i(j) - \bar{x}_n(j))(x_i(k) - \bar{x}_n(k)).$$

***Задача* 12.** Една машина произвежда болтове, като вероятността даден болт да е дефектен е p, една и съща за всеки болт, и резултатите за различните болтове са независими. Купувач инспектира голяма партида произведена от машината, за да реши дали да закупи партидата. Неговата стратегия се състои в случаен избор на 10 болта и ако няма дефектни партидата е приемлива, ако три или повече са дефектни партидата се отказва; ако дефектните са един или два се изследват нови десет болта и партидата се приема при общо не повече от два дефектни.

(а) Каква е вероятността да бъде взето решение на първия етап?

(б) Да се намери вероятността партидата да бъде одобрена при $p = 0,05$. Как се променя вероятността, ако $p = 0,15$?

***Задача* 13.** Трима играчи A, B и C стрелят в мишена и се редуват (в посочения ред) докато някой уцели мишената. Вероятността играчът A да уцели при един изстрел е $\frac{1}{10}$, а вероятностите за играчи B и C са съответно $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{8}$.

(а) Покажете, че вероятността да спечели за всеки един от тримата играчи е една и съща.

(б) Да се намери очаквания брой изстрели до края на играта.

***Задача* 14.** В "Театър 198" има точно 198 места. Управата на театъра установила, че средно 3% от продадените билети пропадат (зрителите не успяват да дойдат на представлението) и решават да продават по 200 билета за всяко представление. Каква е вероятността да няма правостоящи, ако са продадени всички 200 билета и всеки закупил билет идва на представлението независимо от останалите?

***Задача* 15.** Разбъркваме тесте от 52 карти по следния начин: теглим произволна карта от тестето и след това я връщаме на произволно място в тестето; повтаряме процедурата N пъти. Да се покаже, че след достатъчно повторения, картите ще са разбъркани така, че всяка наредба е равновероятна.

***Задача* 16.** Текст е даден на двама коректори, които трябва да го прочетат независимо един от друг и да отбележат грешките. Коректор A е намерил 21 грешки, а коректор B е намерил 17. При сравнение на грешките се оказало, че 15 от тях са намерени и от двамата коректори. Да се намери оценка на броя на грешките в текста.

***Задача* 17.** Двама стрелци (A и B) стрелят по мишена един след друг (пръв стреля A). Стрелец A уцелва с вероятност p_A, а стрелец B – с вероятност p_B (резултатите от изстрелите са независими). Побеждава този, който уцели мишената пръв. Да се намери вероятността да спечели A.

***Задача* 18.** Имаме два различими зара. Може ли вероятностите за падане на всяка от страните на двата зара да се нагласят така, че сумата от точките на двата зара да е равномерно разпределена върху числата $2, \ldots, 12$?

***Задача* 19.** Организатори на томбола обявяват, че билетите са номерирани от 1 до N. Първият билет е избран по случаен начин и е с номер 881. Да се намери оценка за N по метода на моментите и по метода на максималното правдоподобие.

***Задача* 20.** За да се определи размера на дадена популация, 100 животни от популацията са хванати и маркирани. По-късно от популацията са избрани случайно 50 животни и е установено, че 20 от тях са маркирани. Да се намери оценка на броя на животните в популацията.